DS d'informatique – Sujet 0 – Corrigé

Exercice 1 – Calcul des coefficients binomiaux

1.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4
0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0
2	1	2	1	0	0
3	1	3	3	1	0
4	1	4	6	4	1

2. En utilisant la première relation de (I), on remplit la colonne $k=0$ avec des 1, puis avec la seconde, on remplit le reste de la ligne $n=0$ avec des 0.
Ensuite, avec la relation (R), on peut remplir le reste de la ligne $n=1$ car cela n'utilise que les valeurs de la ligne $n=0$, qui sont connues. On procède de même pour la ligne $n=2$, qui n'utilise que le valeurs de la ligne $n=1$, et ainsi de suite jusqu'à $n=4$.

Dans la fonction `binom(N,K)`, on va construire un tableau 2D appelé `T`, de sorte que `T[n,k]` contient la valeur $\binom{n}{k}$.

3.

```
1  import numpy as np
2  def binom(K,N):     # calcule le coefficient "K parmi N"
3      if K>N:
4          return 0
5      else:
6          T = np.zeros( (N+1,N+1) )  # tableau de taille (N+1)×(N+1) rempli de zéros
7
8          # On remplit d'abord T avec la formule (I)
9          for n in range(N+1):
10             T[n,0]  = 1
11             # T[0,k] vaut déjà 0
12
13         # On remplit ensuite T avec la formule (R)
14         for n in range(N):
15             for k in range(N):
16                 T[n+1,k+1] = T[n,k] + T[n,k+1]
17
18         return T[N,K]
```

4. Une opération élémentaire est ou bien une opération de comparaison (< > == etc.) ou bien une opération de calcul simple (+ - * / etc.)

5. Seule la ligne 16 compte pour une opération élémentaire. Si $K>N$, on ne réalise donc aucune opération élémentaire. Si $K \leq N$, alors la ligne 16 est exécutée une fois pour chaque couple $(k,n) \in [\![0,N-1]\!]^2$: il y a donc N^2 opérations élémentaires. Le pire cas arrive donc lorsque $K \leq N$.
La complexité est ainsi d'ordre N^2, c'est-à-dire quadratique.

6. Montrons ce résultat par récurrence sur $N \in \mathbb{N}$.

   - Initialisation : si $N=0$, alors la relation (I) suffit pour calculer $\binom{0}{1}$, donc on fait bien $N=0$ opération élémentaire.

- Hérédité : Supposons qu'on puisse calculer $\binom{N}{1}$ avec N opérations élémentaires. Montrons qu'on peut calculer $\binom{N+1}{1}$ avec $N+1$ opérations élémentaires. En appliqant (R) pour $k=0$ et $n=N$, on a

$$\binom{N+1}{1} = \binom{N}{0} + \binom{N}{1}$$

Or, $\binom{N}{0} = 1$ par (I) et $\binom{N}{1}$ s'obtient avec N opérations élémentaires. Ainsi, en $N+1$ opérations élémentaires, on peut calculer $\binom{N+1}{1}$.

7. Il faut 9 opérations élémentaires :

$n\backslash k$	0	1	2	3	4
0	1	0	0	0	0
1	1	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	0
2	1	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$	0
3	1	3	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	0
4	1	4	6	$\boxed{4}$	1

8. La proposition correcte est b). *Bien que cela ne soit pas demandé, voilà pourquoi a), c) et d) ne marchent pas :*
   - Si a) était correcte, alors $k \leq K-2$ et donc l'instruction `T[n+1,k+1]=...` ne permet pas de remplir `T` au-delà de la colonne d'indice $K-1$: cela ne suffit pas pour en déduire `T[N,K]`.
   - Si c) était correcte, alors on réalise une itération avec $k=K$. Avec l'instruction `binom(N,N)`, on a $K=N$, et donc on réalise une itération avec $k=N$. Or, lorsque $k=N$, l'instruction `T[n+1,k+1]=...` produit une erreur car `T` n'a pas de colonne d'indice $N+1$: elles vont de l'indice 0 à l'indice N (pour un total de $N+1$ colonnes).
   - Si d) était correcte, alors $k \leq n-1$. Or, $n \leq N-1$ par la ligne 14 : ainsi, on aurait $k \leq N-2$. Avec l'instruction `T[n+1,k+1]=...` on remplit au mieux jusqu'à la colonne d'indice $k+1 \leq N-1$. Avec l'instruction `binom(N,N)`, on ne pourrait donc pas calculer `T[N,N]`.
9. Si $K=1$, alors la ligne 15 modifiée ne réalise qu'une seule itération, pour $k=0$. Ainsi la ligne 16 est exécutée $N \times 1$ fois : on fait bien N opérations élémentaires.
10.

$n\backslash k$	0	1	2	3	4
0	1	0	0	0	0
1	1	$\boxed{1}$	0	0	0
2	1	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	0	0
3	1	3	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	0
4	1	4	6	$\boxed{4}$	1

11. On peut modifier la ligne 15 comme suit :

```python
for k in range(min(n+1,K)):
```

De cette manière, on a toujours $k \leq n$, donc l'instruction `T[n+1,k+1]=...` *ne va jamais remplir la partie au-dessus de la diagonale de* `T`.

Enfin, on peut faire encore mieux car pour calculer $\binom{4}{3}$, il n'est pas nécessaire de calculer par exemple $\binom{4}{1}$. Pour la ligne N, on peut donc commencer l'itération à $k=K$. Pour la ligne $N-1$, on peut donc commencer à $k=K-1$, etc. On se retrouve alors avec :

```python
for k in range( max(0,n+K-N) , min(n+1,K) ):
```